~Rombaldi p734 (Lemmes, Thm)
~Gourdon (Alg, 3e) p 256 (Cors)

THÉORÈME SPECTRAL

149, 151, 155, 158

Soient $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.
Soit $u \in S(E)$ de matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{B}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - u)$.

<u>Lemme 1</u>: Pour toute $\lambda \in Sp(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour toute $\mu \in Sp(A) \setminus \{\lambda\}$, $E_\lambda(A) \perp E_\mu(A)$.

<u>Lemme 2</u> ($n \geq 2$): Soient $\lambda \in Sp(u)$ et $e_1 \in E_\lambda(u)$ de norme 1. Alors $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u.

<u>Thm</u> (spectral): 1▸ u se diagonalise en base orthonormée
2▸ Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ est diagonale.

<u>Cor 1</u>: Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une base orthonormale de E qui est q-orthogonale.

<u>Cor 2</u>: Soient $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in S_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPMP = I_n$ et ${}^tPNP$ est diagonale.

<u>Preuve de Lemme 1</u>: Soit $(\lambda, \mu) \in Sp(A)^2$ tel que $\lambda \neq \mu$.

▸ Soit $x \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$. Alors $Ax = \lambda x$, donc ${}^t\bar{x}Ax = \lambda\, {}^t\bar{x}x$. Or A est symétrique et réelle, donc ${}^t\bar{x}Ax = {}^t(\overline{Ax})x = \bar{\lambda}\, {}^t\bar{x}x$. Comme ${}^t\bar{x}x \neq 0$, on a bien $\lambda = \bar{\lambda}$, i.e. $\lambda \in \mathbb{R}$.

▸ Soient $x \in E_\lambda(A)$ et $y \in E_\mu(A)$. On a $\lambda\langle x|y\rangle = \langle \lambda x|y\rangle = \langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle = \mu\langle x|y\rangle$ car A est symétrique, et $\lambda \neq \mu$ donc $\langle x|y\rangle = 0$. Ainsi, $E_\lambda(A) \perp E_\mu(A)$.

<u>Preuve de Lemme 2</u>: $H := (\mathbb{R}e_1)^\perp = \mathrm{Ker}(\langle\cdot|e_1\rangle)$ et $\langle\cdot|e_1\rangle \neq 0$ car $e_1 \neq 0$, donc H est un hyperplan. Pour tout $x \in H$, $u(x) \in H$ car par symétrie de u, $\langle u(x)|e_1\rangle = \langle x|u(e_1)\rangle = \langle x|\lambda e_1\rangle = 0$. Ainsi H est stable par u, donc on dispose de l'endomorphisme induit $u_H \in S(H)$ (il est bien symétrique, car si on complète (e_1) en une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$, alors $(e_2, \dots, e_n)$ est une base de H, et en notant $B = \mathrm{Mat}_{(e_2,\dots,e_n)}(u_H)$, on a $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, donc B est symétrique.)

<u>Preuve du Thm</u>: 1▸ On procède par récurrence sur $n \geq 1$:

▹ $n = 1$: immédiat.

▹ Soit $n > 1$ tel que tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension $k < n$. Supposons que E est de dimension n, soit $u \in S(E)$. Soient $\lambda_1 \in Sp(u)$ et $e_1 \in E_{\lambda_1}(u)$ de norme 1. Soit u_H l'endomorphisme symétrique sur $H := (\mathbb{R}e_1)^\perp$ induit par u d'après Lemme 2. On a $E = \mathbb{R}e_1 \overset{\perp}{\oplus} H$ et $\dim(H) < n$, donc par hypothèse de récurrence, il existe $(e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de H qui diagonalise u_H. De là, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E qui diagonalise u.

2▸ Il suffit de remarquer qu'une matrice orthogonale est une matrice de passage entre bases orthonormées.

<u>Preuve de Cor 1</u>: Posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPMP$ est diagonale d'après le Thm. Or P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers une base orthonormée $\mathcal{B}'$, et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = {}^tPMP$ est diagonale.

<u>Preuve de Cor 2</u>: Posons $q : X \in \mathbb{R}^n \longmapsto {}^tXMX$ la forme quadratique dont M est la matrice dans la base canonique. Posons $q' : X \in \mathbb{R}^n \longmapsto {}^tXMX$ la forme quadratique dont N est la matrice dans la base canonique. Dans l'espace euclidien (E, q) (et non $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$), il existe une base $\mathcal{B}_q$ orthonormée de $\mathbb{R}^n$ qui est q'-orthogonale d'après Cor 1. Posons $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_q}(q)$ et $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_q)$. Alors ${}^tPMP = I_n$ et ${}^tPNP = D$